Paradigma

Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma (CIEP)
ISSN 1011-2251 ISSN 2665-0126
Volume XLV, Noviembre de 2024
Edición Temática, Número 2
10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024002.id1574

Da formação à pesquisa sobre professores que ensinam Matemática: contribuições da Teoria da Objetivação para a compreensão do desenvolvimento do pensamento algébrico

Iraji de Oliveira Romeiro[1] Vanessa Dias Moretti[2] Luis Radford[3]

Resumo

Este trabalho visa abordar as contribuições da Teoria da Objetivação para a formação de professores que ensinam matemática nos anos iniciais, a partir de um recorte de uma pesquisa de doutorado desenvolvida no contexto de uma pesquisa coletiva sobre a formação continuada de professores que ensinam matemática que teve como objetivo identificar as formas de generalização manifestadas por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao resolverem tarefas envolvendo o conhecimento algébrico. Na primeira parte do texto retratamos a Teoria da Objetivação como base teórica para a pesquisa e suas contribuições para o desenho da atividade de formação de professores aos professores. Na segunda parte, o texto envolve a Teoria da Objetivação como base metodológica da pesquisa tanto na coleta como na análise de dados. A análise multimodal da TO se mostrou potencial para revelar as formas de generalização características do movimento de pensar algebricamente dos professores. Como resultado, a Teoria da Objetivação parece ser uma teoria com potencial para investigar a formação de professores. Oferece ideias para a desenho de tarefas matemáticas e para a organização do espaço formativo em que professores e formadores/investigadores se envolvem juntos em atividade, no labor conjunto, num processo dialógico e criativo de produção de ideias e contradições, do qual emerge uma forma incorporada e sensível de pensar algebricamente em relação dialética com a cultura e a história.

Palavras-chave: Teoria da Objetivação. Pesquisa em Educação Matemática. Pensamento Algébrico. Formação de Professores. Ensino de álgebra nos anos iniciais.

From training to research on teachers who teach mathematics: contributions of Theory of Objectivation to understanding the development of algebraic thinking

Abstract

This work aims to address the contributions of Objectification Theory to the training of teachers who teach mathematics in the initial years, based on an excerpt from a doctoral research developed in the context of a collective research on the continued training of teachers who teach mathematics that had The objective is to identify the forms of generalization manifested by teachers in the initial years of Elementary School when solving tasks involving algebraic knowledge. In the first part of the text we portray the Theory of Objectification as a theoretical basis for research and its contributions to the design of teacher training activities for teachers. In the second part, the text involves the Theory of Objectification as a methodological basis for research in both data collection and analysis. The multimodal analysis of OT showed potential to reveal the forms of generalization characteristic of teachers' movement of thinking algebraically. As a result, Objectification Theory appears to be a theory with potential for investigating teacher training. It offers ideas for the design of mathematical tasks and for the organization of the training space in which teachers and trainers/researchers engage together

[1] Doutorado em Educação pela Universidade Federal de São Paulo. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. Grupo de Estudos e Pesquisa em Processos Educativos e Perspectiva Histórico-Cultural – Educação Matemática. E-mail: irajioliveira@gmail.com

[2] Doutorado em Educação pela Universidade de São Paulo. Professora da Universidade Federal de São Paulo – Departamento de Educação Grupo de Estudos e Pesquisa em Processos Educativos e Perspectiva Histórico-Cultural – Educação Matemática. Orientador da pesquisa. E-mail: vanessa.moretti@unifesp.br

[3] Doutor em Didática da Matemática, Strasbourg, França. Professor Emérito da Laurentian University, Canadá. Coorientador da pesquisa. E-mail: lradford@laurentian.ca

in activity, in joint work, in a dialogical and creative process of producing ideas and contradictions, from which an embodied form emerges and sensitive ability to think algebraically in a dialectical relationship with culture and history.
Keywords: Theory of Objectification. Research in Mathematics Education. Algebraic Thinking. Teacher training. Teaching algebra in the early years.

De la formación a la investigación sobre docentes que enseñan Matemáticas: aportes de la Teoría de la Objetificación para comprender el desarrollo del pensamiento algebraico

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo abordar los aportes de la Teoría de la Cosificación a la formación de docentes que enseñan matemáticas en los años iniciales, a partir de un extracto de una investigación doctoral desarrollada en el contexto de una investigación colectiva sobre la formación continua de docentes que enseñan matemáticas que tuvo El objetivo es identificar las formas de generalización que manifiestan los docentes de los primeros años de la Escuela Primaria al resolver tareas que involucran conocimientos algebraicos. En la primera parte del texto retratamos la Teoría de la Cosificación como base teórica para la investigación y sus aportes al diseño de actividades de formación docente para docentes. En la segunda parte, el texto aborda la Teoría de la Cosificación como base metodológica para la investigación tanto en la recogida como en el análisis de datos. El análisis multimodal de la TO mostró potencial para revelar las formas de generalización características del movimiento de pensamiento algebraico de los profesores. Como resultado, la Teoría de la Objetificación parece ser una teoría con potencial para investigar la formación docente. Ofrece ideas para el diseño de tareas matemáticas y para la organización del espacio de formación en el que profesores y formadores/investigadores participan juntos en actividad, en trabajo conjunto, en un proceso dialógico y creativo de producción de ideas y contradicciones, a partir del cual se forma una forma encarnada. Surge una capacidad sensible para pensar algebraicamente en una relación dialéctica con la cultura y la historia.
Palabras clave: Teoría de la Objetivación. Investigación en Educación Matemática. Pensamiento algebraico. Formación de profesores. Enseñanza del álgebra en los primeros años.

SOBRE O PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS FRENTE AO CONHECIMENTO ALGÉBRICO

A discussão acerca da inserção da álgebra no currículo escolar tem sido contemplada em várias pesquisas, desde os anos 80 do século passado, tanto no âmbito nacional quanto internacional (FILOY; ROJANO, 1989; FIORENTINI; MIORIN; MIGUEL, 1993; LINS; GIMENEZ, 1998; KAPUT, 2000; entre outros). Partindo dessas pesquisas, nos anos 90 e início do ano 2000, apontou-se a importância de que a álgebra fosse inserida no currículo escolar desde os primeiros anos escolares. O interesse no estudo dessa transição, principalmente nas primeiras séries, se intensificou, no Brasil, a partir da publicação da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), que inseriu de forma explícita a unidade temática "Álgebra" desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Nesse contexto, evidenciou-se a necessidade de trabalhos, estudos e pesquisas que olhassem para o professor que ensina Matemática nos anos iniciais, compreendendo seus desafios, dificuldades e potencialidades frente à demanda de desenvolver uma prática pedagógica para o ensino e aprendizagem do conhecimento algébrico. Afinal, como esse professor pensa matematicamente sobre situações matemáticas que envolvem conhecimentos algébricos?

Diante dessas inquietações, o Grupo de Estudos e Pesquisa em Processos Educativos e Perspectiva Histórico-Cultural[4] (GEPPEDH-Mat) desenvolveu uma pesquisa coletiva, entre os anos de 2018 e 2019, intitulada "O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico voltado aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: contribuições da Teoria da Objetivação", cujo objetivo foi investigar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos professores, ao resolverem coletivamente situações de aprendizagem organizadas com fundamentação na abordagem histórico-cultural.

A pesquisa tomou como base teórica as contribuições da perspectiva Histórico-Cultural (VIGOTSKI, 2010) e da Teoria da Objetivação (RADFORD, 2021) e ocorreu no contexto de uma formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental que buscou propiciar o encontro dos professores com o saber histórico-cultural algébrico. Os dados dessa pesquisa constituíram a base de investigação de uma pesquisa de pós-doutoramento (MORETTI; RADFORD, 2021; MORETTI; RADFORD, 2023), duas pesquisas de doutorado, uma concluída (ROMEIRO, 2023) e outra em fase de finalização (ZEFERINO, 2024). Resultados da pesquisa também foram divulgados por Moretti, Virgens e Romeiro (2022).

Para os fins deste texto, focaremos a pesquisa de Romeiro (2023) cujo objetivo foi de identificar as formas de generalização que são manifestas por professores em atividade conjunta ao resolverem situações envolvendo elementos do conhecimento algébrico nos anos iniciais. Ao final, buscamos evidenciar as contribuições teóricas e metodológicas da Teoria da Objetivação para a pesquisa desenvolvida no âmbito de uma formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais.

A TEORIA DA OBJETIVAÇÃO COMO BASE TEÓRICA PARA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

A Teoria da Objetivação (TO) tem sido desenvolvida por Luis Radford compreendendo-a como uma meta de esforço dinâmico, político, social, histórico e cultural. Fundamentada nos pressupostos da perspectiva Histórico-Cultural, na Antropologia, na Filosofia, na Semiótica, a TO possui como ideia principal o conhecer e vir a ser (RADFORD, 2011; 2017a), se instalando como uma teoria educacional contemporânea que tem como foco o processo de ensino e aprendizagem.

Para a Teoria da Objetivação, o saber cultural é entendido como um sistema dinâmico de formas de ação e pensamento que têm sido produzidas histórica e culturalmente, "uma produção cultural das pessoas por meio de seu trabalho, de suas ações, suas reflexões, suas alegrias, seu sofrimento e suas esperanças" (RADFORD, 2021, p. 68). O saber emerge da atividade humana em um processo em movimento, conforme as relações socioculturais que vão se estabelecendo e por meio do trabalho humano.

[4] Linha de pesquisa Educação Matemática. Mais informações do grupo disponíveis no Diretório de Grupos de Pesquisa da CAPES, no endereço http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/35714.

Deste ponto ontogenético, o saber histórico-cultural, produzido a partir das necessidades humanas, não se revela necessariamente à consciência do sujeito de maneira natural. Para que esse saber passe a ser objeto da consciência (por exemplo, as maneiras culturais de pensar as quantidades, as formas espaciais e sua classificação, o tempo e sua medida), é necessário que o dito saber se manifeste na atividade humana coletiva e se converta em objeto de consciência e reflexão. Essa manifestação fenomenológica e concreta do saber é o que Radford (2021) chama de conhecimento. A Aprendizagem consiste na tomada de consciência crítica na lógica cultural do saber e se faz através de um processo que se denomina de processo de objetivação, isto é, objetiva na consciência a produção humana, saber, que inicialmente era apenas potencialidade. O fato de a aprendizagem ser vista como tomada de consciência, não significa que a consciência precede a aprendizagem. Esse processo de objetivação é produtor e transformador da própria consciência. É por ela que, concomitantemente ao processo de objetivação, ocorre a transformação subjetiva do sujeito que compreende, age e transforma a história e a cultura na qual está inserido por meio da compreensão consciente dos objetos e ideias, produzindo assim, novos saberes. Esse movimento de “tornar-se”, na atividade, é um processo que Radford (2017a) denomina de subjetivação.

É nesta perspectiva *dialética* entre a objetivação e a subjetivação que se dá a aprendizagem. Desta forma, a aprendizagem envolve tanto o movimento de conhecer como de tornar-se (RADFORD, 2017a). “É o complexo encontro com o saber e sua transformação subjetiva em um objeto da consciência” (RADFORD, 2021, p. 110). Desta maneira, a aprendizagem é vista como um processo complexo e multifacetado que, no contexto escolar, envolve a relação ativa entre o aluno, o professor, os outros alunos e o ambiente de aprendizagem. Esse movimento colaborativo entre professores e alunos é o que Radford chama de labor conjunto[5] (RADFORD, 2017a; 2021).

Para Radford (2021), o labor conjunto é a principal categoria ontológica da TO e é compreendido como “um *modo de vida*, algo *orgânico e sistêmico*, um evento criado por uma busca com outros para a solução de um problema” (RADFORD, 2021, p. 122). Os sujeitos da atividade, professores e alunos, não interagem de maneira simples e passiva, eles trabalham juntos de forma colaborativa “ombro a ombro” (RADFORD, 2017b, p. 138, tradução nossa) de modo ativo, havendo durante o processo momentos de tensão, contradição, discordância, concordância, tendo um objetivo comum: encontrar o saber histórico-cultural. Este labor conjunto não envolve somente a linguagem entre eles, mas inclui também o movimento incorporado nos gestos, no ritmo, na emoção, na sensação, enfim, em diversos meios semióticos de objetivação. Além disso, o labor conjunto envolve uma relação ética particular, uma ética de compromisso e respeito entre os sujeitos da atividade, em que um se preocupa e cuida do outro, em uma atitude de alteridade.

Foi nessa perspectiva teórica que o GEPPEDH-Mat organizou a pesquisa coletiva com os professores que ensinam matemática nos anos iniciais, de modo a possibilitar o encontro do saber

[5] É possível encontrar alguns trabalhos de Radford com a expressão “*labour conjunto*” (RADFORD, 2017a, p. 156), ou “*labor conjunto*” (RADFORD, 2021, p. 54). Em alguns trechos, usaremos o termo “*trabalho conjunto*” para aproximar o termo “trabalho” como atividade humana. Ainda vale destacar que, na língua portuguesa, *labor* é sinônimo de *trabalho* (DICIONÁRIO HOUAISS, 2024).

histórico-cultural algébrico como objeto da consciência e com isso, possibilitar um modo também consciente e intencional de organização do ensino.

Assim, a Teoria da Objetivação constitui a base teórica para os estudos e organização da pesquisa junto aos professores que ensinam matemática nos anos iniciais envolvendo o saber histórico-cultural algébrico. No próximo item vamos abordar como a Teoria da Objetivação orientou a organização metodológica da pesquisa.

DA FORMAÇÃO À PESQUISA SOBRE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES METODOLÓGICAS DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

Ao investigarmos as formas de generalização manifestadas pelos professores que ensinam matemática nos anos iniciais, envolvendo o conhecimento algébrico, buscamos na TO um método que nos permitisse reconhecer tais manifestações dos professores e elucidar o movimento do pensamento dos professores com vistas ao encontro do saber algébrico.

Para isso, organizamos um experimento formativo (DAVÍDOV, 1988) cuja organização considerou os pressupostos metodológicos e ontológicos da Teoria da Objetivação que envolvem o labor conjunto, a atividade multimodal semiótica da atividade humana e ações envolvendo objeto-objetivo-tarefa para colocar em movimento o processo de objetivação do saber.

O experimento formativo foi dividido em duas partes: a primeira parte ocorreu no segundo semestre de 2018, com treze encontros, e a segunda parte no segundo semestre de 2019, com sete encontros, totalizando 20 encontros presenciais. Os encontros aconteceram em uma escola da rede pública municipal da cidade de Guarulhos, durante a hora atividade[6] dos professores participantes. Além dos encontros presenciais, foram propostas leituras a serem realizadas em local de livre escolha pelos professores, para serem debatidas nos encontros presenciais[7]. Participaram da primeira parte do experimento 18 professores e, na segunda parte, participaram 8 professores que haviam participado da primeira parte do experimento em 2018. Os professores foram organizados em grupos de 4 ou 5 professores que se mantiveram durante toda a primeira parte do experimento.

Entendendo a manifestação do saber como um "processo emergente", o que "significa que a sala de aula é entendida como um *sistema* que evolui através de "estados", organizamos as ações de formação docente em "estados emergentes" (RADFORD, 2015, p.555), com vistas ao labor conjunto no ambiente de aprendizagem: 1. Apresentação da tarefa pelo formador/pesquisador para o grupo de professores; 2. Divisão dos professores em pequenos grupos para discussão e resolução da tarefa; 3. Participação do pesquisador/formador nos grupos, realizando questões que possibilitassem o encontro

[6] Hora Atividade: Horário de Trabalho Coletivo remunerado dos professores, da Rede Municipal de Guarulhos, que ocorre na unidade escolar, com duração de uma hora diária.

[7] Texto elaborado pelos pesquisadores, a partir de excertos de textos de Radford (2012, 2015, 2018) que traziam os elementos essenciais para a compreensão do pensamento algébrico à luz da TO.

dos professores com o saber algébrico; 4. Discussão dos desdobramentos da tarefa em plenária, em que os grupos apresentavam para os outros suas descobertas, discussões e dificuldades; 5. Síntese coletiva, vislumbrando a compreensão dos elementos conceituais envolvidos na tarefa proposta.

As ações organizadas no experimento formativo consideraram a estrutura objeto-objetivo-tarefa (RADFORD, 2015) a partir de cinco tarefas, pautadas no conceito de Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA)[8] (MOURA, 1996), cujo objetivo era colocar os professores diante da necessidade histórico-cultural de produção do conceito: “O jogo da adivinha” que tinha como essência a operação inversa (aritmética generalizada); “A força do sapo Jeremias”, “A fantástica aventura de Leo” e “Férias, que coisa boa!”, que tinham como essência as variáveis (relação entre grandezas e pensamento funcional); e a tarefa “É possível prever o futuro”, que teve como elemento essencial a variável (pensamento funcional).

A resolução das tarefas se deu por meio da interação entre pesquisador e professores na perspectiva do labor conjunto, isto é, interação que conduz ao aparecimento sensual e polifônico na sala de aula de uma maneira algébrica de pensar formada conjuntamente, o que na Teoria da Objetivação se chama a “produção de uma obra comum” (RADFORD, 2021, p. 55).

Visando uma posterior análise multimodal, nos pautamos em Radford (2015) para a seleção de instrumentos para a coleta de: 1. *Gravação de áudio e vídeo*: uma câmera de vídeo e um gravador de áudio em cada grupo. Uma câmera extra ficou alocada na lateral da sala, de modo a filmar o coletivo; 2. *Folha individual*: cada professor recebeu uma folha (por encontro) para registros das suas percepções, hipóteses, descobertas, e demais registros escritos. As folhas eram digitalizadas e, quando necessário, as originais eram devolvidas aos professores o que permitiu que pudéssemos durante a análise diferenciar os registros dos diferentes encontros; 3. *Folha de registro coletivo*: Para registro das descobertas, conclusões e síntese coletiva do grupo; 4. *Registros na lousa ou em cartazes*: Foram fotografados registros da lousa decorrentes dos momentos de síntese coletiva em plenária; 5. *Notas de campo dos pesquisadores*: registros de observações de momentos relevantes para uma posterior análise ou organização dos encontros seguintes.

Todos os dados foram armazenados em drive eletrônico e computador, compondo então o acervo de imagens, áudios e vídeos utilizados para análise. Os dados, já em arquivos eletrônicos, foram organizados em pastas separadas por ano, encontro e por tipo de fonte de dado (áudio, vídeo, folhas digitalizadas etc.), como sugerido por Radford (2015).

Assumindo que a unidade de análise na Teoria da Objetivação é a atividade humana (RADFORD, 2015), recorremos à análise multimodal da atividade que permite ao pesquisador cruzar os diversos meios de manifestação das formas de pensamento (fala, gestos, representações escritas, ritmos, sentimentos, respiração, manipulação de artefatos físicos, entre outros), materializados pelos diversos meios semióticos e, com isso, compreender de maneira mais elaborada e completa “evidências que

[8] A Situação Desencadeadora de Aprendizagem Situações, na concepção da Atividade Orientadora de Ensino, são situações problemas que trazem consigo o movimento lógico-histórico do objeto de conhecimento (MORETTI, 2007).

demonstrem a tomada de consciência dos sujeitos acerca de significados matemáticos construídos culturalmente" (MORETTI; RADFORD, 2021, p. 6).

Na análise semiótica multimodal, buscou-se identificar e explicar o modo de pensar e generalizar as situações analisadas, buscando compreender se estavam no campo do pensamento aritmético ou do pensamento algébrico que, conforme Radford (2018), envolve três características: indeterminação, analiticidade e modos idiossincráticos de representar ou simbolizar essas quantidades indeterminadas e suas operações.

Para o desenvolvimento da análise multimodal dos dados produzidos ao longo do experimento formativo, nos pautamos em três fases sugeridas por Radford (2015, p. 561): 1. *Seleção dos segmentos salientes.* Segmentos de vídeos e áudios com potencialidade para revelar indícios de objetivação do saber algébrico e subjetivação do modo que o sujeito se torna perante o grupo. As elocuções são tratadas e transcritas igualmente sem prestar atenção ao contexto, intenção etc. 2. *Análise do segmento saliente por meio das lentes e princípios teóricos voltados para a teoria e das questões de pesquisa em análise*. Inserção de imagens, com o tempo preciso da foto ou vídeo, acompanhadas de comentários interpretativos relacionados às formas de generalização manifestadas pelos professores ao se envolverem com as tarefas. 3. *Andamento do diálogo.* Inserção da "cadência" dos diálogos (demonstrações emotivas, indicações de pausas, hesitações verbais, gestuais, entre outros).

A seguir, apresentaremos o movimento de análise dos dados produzidos, com o propósito de alcançar o objetivo proposto na pesquisa de Romeiro (2023).

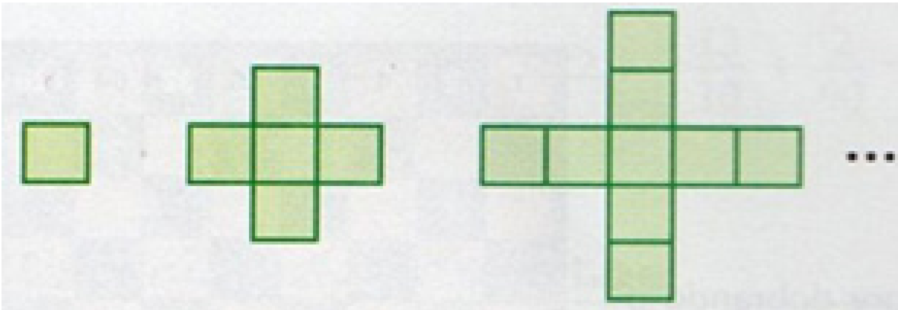
FORMAS DE GENERALIZAÇÃO MANIFESTADAS NO PROCESSO FORMATIVO DE PROFESSORES ENVOLVENDO ELEMENTOS DO CONHECIMENTO ALGÉBRICO DOS ANOS INICIAIS

Neste item buscaremos evidenciar algumas formas de generalização manifestas por professores no movimento formativo que foi organizado a partir de contribuições metodológicas da Teoria da Objetivação. Além disso, os excertos de dados apresentadas resultam de processos de pesquisa, produção e análise de dados, fundamentado na Teoria da Objetivação. Assim, trazemos recortes da análise na perspectiva semiótica multimodal, em que não só as falas ou representações escritas fossem consideradas, mas, todos os modos de manifestação que pudessem evidenciar indícios de objetivação do saber algébrico, em uma relação dialética.

Para apresentação dos segmentos salientes, usaremos no diálogo entre os pesquisadores e professores a sequência numérica crescente para possibilitar a localização da fala de cada sujeito do grupo durante a análise. A realidade produzida no experimento formativo, apresentado no texto, estará acompanhado do encontro, do instrumento no qual o segmento foi retirado, com o tempo na qual o diálogo ocorreu.

Para este artigo, vamos mostrar o movimento de um grupo constituído por 5 professores que denominamos de grupo 4 (G4), na resolução da tarefa denominada “A Fantástica Aventura de Leo”. Resumidamente, a tarefa envolvia um enigma: para que as crianças pudessem sair de uma terra mágica elas precisavam descobrir a quantidade de quadrados necessários para uma determinada posição de sequência que era determinada pelo número de crianças. Cinco posições da sequência para cada crianças que quisesse deixar a terra mágica, conforme representado na figura 1.

Figura 1–Representação figural da tarefa “A Fantástica Aventura de Leo”



Fonte: Arquivo do GEPPEDH-Mat

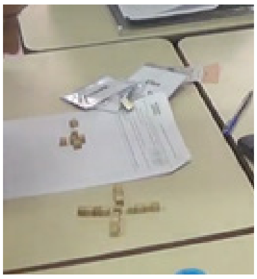
Essa SDA foi trabalhada em dois encontros e continha três questões com complexidade progressiva tendo como nexos conceituais a relação entre as grandezas, a variável e a relação funcional. Para garantir o anonimato dos sujeitos da pesquisa, os nomes citados no texto são fictícios.

A primeira questão versou em encontrar quantos quadradinhos[9] havia no 5º termo da sequência. Foram disponibilizados aos professores cubinhos do material dourado que poderiam servir como instrumento concreto auxiliar.

Assim como constatado por Radford (2018) nas suas pesquisas com os estudantes, inicialmente os professores começaram tentando compreender o padrão da sequência por meio da observação e da contagem. A professora Katia, Paula e Eloísa utilizaram o recurso do material concreto para apoiar suas hipóteses e chegar à resposta. Já o professor Irineu utiliza o próprio dedo como instrumento auxiliar para a compreensão do padrão buscando responder a questão. A professora Katia, Paula e Irineu compreendem rapidamente o padrão, isto é, a cada termo aumenta 4 quadradinhos. A professora Eloísa demora um pouco mais de tempo para descobrir o padrão. Além disso, a professora Eloísa fica em dúvida se o quadradinho do meio (referente a primeira posição) é o contado para responder a primeira questão que versa em responder a quantidade de quadradinhos da 5ª posição. Depois de muito diálogo, chega-se à conclusão de que o quadradinho do meio é contado, uma vez que ele está contido na composição de cada termo da sequência. Todos os professores, resolvem a primeira questão por meio da contagem termo a termo, e generalizam aritmeticamente que a cada termo se acrescenta 4 quadradinhos, conforme registro da professora Eloísa da figura 3, apoiado no material concreto conforme figura 2.

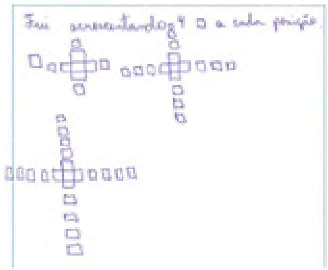
[9] No texto usaremos o termo ***quadradinho*** para se referir a figura plana representada na folha da SDA, conforme figura 1, e o termo ***cubinho*** para designar o material concreto ofertado e manipulado pelos professores.

Figura 2 – Utilização do material concreto para a resolução da primeira questão



Fonte: Encontro 5, G4, Vídeo de Trabalho Conjunto (10’37”)

Figura 3 – Resolução da primeira questão da SDA da professora Eloísa

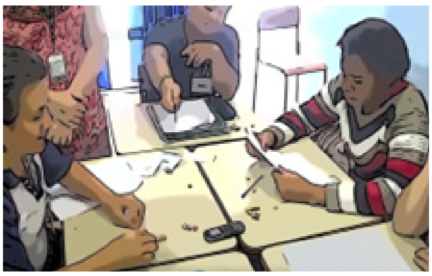


Fonte: Eloísa, 5, Registro Individual

Consideramos este modo de generalizar pertencente ao pensamento aritmético, uma vez que os dados semióticos demonstram foco nos dados quantitativos, por meio da contagem termo a termo. Sendo assim, não há denotação entre as grandezas e o trabalho com os dados da tarefa é baseado na concretude dos termos e não na indeterminação. Desta forma, o movimento do pensamento para responder a primeira questão envolve a generalização aritmética, em que o padrão é reconhecido e adicionado termo a termo para encontrar a quantidade de quadradinhos de cada termo.

A segunda questão versou em saber qual é a quantidade de quadradinhos para cinco crianças saírem da terra mágica. Logo os professores perceberam que deveriam construir a posição 25 e sentiram a necessidade de achar um modo mais geral para encontrar a quantidade de quadradinhos desse termo da sequência, sem ser pela contagem termo a termo, conforme o segmento saliente apresentado no quadro a seguir:

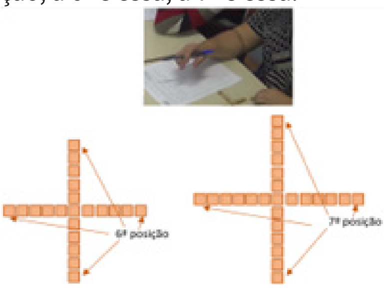
Quadro 1 – Necessidade da busca de um modo geral de compreender a sequência

Enunciado	Segmento Saliente 1	Comentários interpretativos
01	Irineu: Esse jeito que a Eloísa está fazendo a gente chega lá. [...] 	Apontado para os cubinhos que a Eloísa estava adicionando a cada termo, de acordo com o padrão, o que envolve uma generalização aritmética.
02	Katia: Então, mas a gente vai ficar o resto da vida acrescentando cubinhos? Tem que ter uma lógica	Katia remete a um modo geral de encontrar qualquer termo da sequência sem recorrer a contagem termo a termo.

Fonte: Encontro 5, G4, Vídeo de Trabalho Conjunto (15’26”-15’44”)

Na busca de encontrar um modo geral de saber a quantidade de quadradinhos dos termos da sequência, a professora Katia sugere ao grupo a seguinte hipótese: para encontrar a quantidade de quadradinhos da 25ª posição, bastaria fazer a quantidade de quadradinhos da 5ª posição vezes 5. A hipótese parte da compreensão de que se a 5ª posição vezes 5 resulta na 25ª posição, então, para achar a 25ª posição deveria ser a quantidade de quadradinhos referente a 5ª posição, isto é, 17 quadradinhos, e multiplicar por 5. O Segmento Saliente 2, apresentado no quadro 2, mostra que a professora Paula não concorda com essa hipótese e diz que a cada 5 posições não são acrescentados 17 quadradinhos, sugerindo que seja feita a contagem dos termos usando o material concreto.

Quadro 2 – Forma de resolução usando o apoio do material concreto

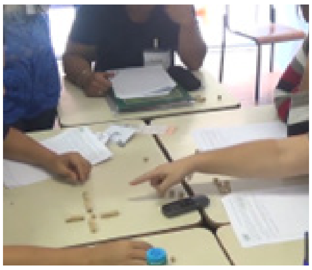
Enunciado	Segmento Saliente 2	Comentários interpretativos
03	Irineu: A gente tem que achar a quantidade de quadradinhos na 25ª posição.	
04	Katia: Que dá 17 x 5. Porque vai acrescentar [5 posições].	
05	Paula: Não, mas cada uma você acrescenta só 4, não acrescenta 17. Se essa daqui é a 5ª posição, a 6ª é essa, a 7ª é essa. 	A professora Paula acrescentando 1 cubinho em cada lado do cubinho central.
06	Katia: Então, acrescenta só quatro.	Se referindo a quantidade de quadradinhos acrescidos em cada posição, isto é, o padrão da sequência.

Fonte: Encontro 5, G4, Vídeo de Trabalho Conjunto (16’59” – 17’31”)

A partir do insucesso da hipótese levantada pela professora Katia, os professores levantam uma nova hipótese: como cada criança representa mais 5 posições, era necessário a partir da 5ª posição (4 quadradinhos), multiplicar por 5 a quantidade de quadradinhos de um lado do quadradinho central, já que são 5 meninos. Para colocar a prova essa hipótese, os professores tentam calcular a 10ª posição, que sairiam dois meninos da terra mágica, conforme o segmento saliente 3 a seguir:

Quadro 3 – Diálogo do modo de resolver a 10ª posição

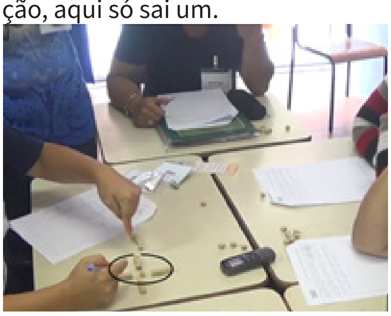
Enunciado	Segmento Saliente 3	Comentários interpretativos
07	Katia: Aqui está na 5ª posição, tem 17 quadradinhos. A décima posição, quantos quadradinhos vão ter? Se aqui tem essa quantidade de quadradinhos (4 quadradinhos referente a um lado do cubinho da 5ª posição), na 10ª vai ser o dobro, vai ser 8.	A professora Eloísa inicialmente concorda com a hipótese da professora Katia e coloca mais 4 cubinhos em cada lado do cubinho central considerando que ali estava a quantidade de quadradinhos referente a 10ª posição.

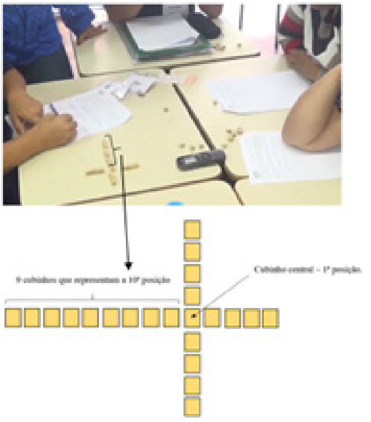
08	Paula: 5ª, 6ª, 7ª, 8ª e 9ª, não é? [...] tem que colocar mais um.  (Contagem dos cubinhos a partir da 6ª posição)	A professora Paula sugere contar, pois ela desconfia que a hipótese de Kátia não está correta. A partir dessa contagem realizada pela professora Paula, tanto a professora Katia como a professora Eloísa percebem que a hipótese levantada pela professora Katia não era verdadeira.
09	Katia: Dá na mesma acrescentar o dobro? Não é a mesma coisa. Então não adianta dobrar, entendeu? Se na 5ª tem 4, na 10ª não vai ter 8.	A referência da professora é o quadradinho central.

Fonte: Encontro 5, G4, Vídeo de Trabalho Conjunto (18’33” – 19’23”)

Diante do fracasso da hipótese levantada pela professora Katia, os professores recorrem a contagem feita com os cubinhos que representam a 10ª posição, a partir da contagem dos cubinhos representados por um dos lados do cubinho central, já que os outros lados se repetiam, o que indica um procedimento baseado no pensamento proporcional.

Quadro 4 – Generalização aritmética de resolução da 10ª posição

Enunciado	Segmento Saliente 4	Comentários interpretativos
10	Irineu: Então vai ser 9 x 4 + 1.	O valor 9 é decorrente da contagem dos cubinhos de um dos lados do cubinho central. A professora Paula concorda com o professor Irineu.
11	Eloísa: Aqui ó, é 4 x 4 + 1. A cada posição ele foi acrescentando 4 e mais 1 que já tinha, então, 4 vezes 4, 16, mais 1, 17. Essa é a 5ª posição, aqui só sai um. 	A professora Eloísa retoma a 1ª questão para explicar a tese do professor Irineu.
12	Katia: Aqui é a 10ª.	Apontando para o registro que a professora Eloísa realizou na folha, que representa a 5ª posição (figura 3).
13	Eloísa: Aqui é a 5ª.	A professora Eloísa demonstra firmeza na sua conclusão de que os 17 quadradinhos se referiam a 5ª posição.

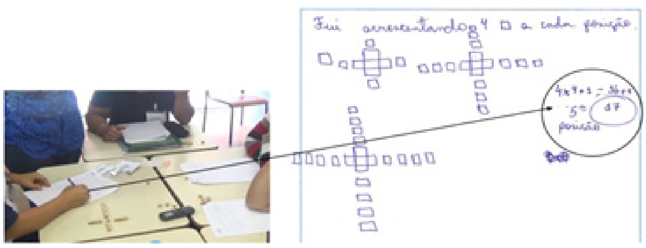
14	Paula: A 10ª vai ser 9 x 4 + 1.	A fórmula proposta é uma abdução, isto é, uma fórmula plausível, mas não necessariamente verdadeira, que se anuncia como uma conjectura.
15	Eloísa: Então vai ser 9 x 4 + 1. 	A citação dos 9 quadradinhos refere-se aos quadradinhos que estão na lateral do quadradinho central, e como existem 4 lados em torno do cubinho central (primeira posição), então, deveria multiplicar o 9 por 4. Este movimento demonstra um movimento de abdução, porém, ainda no campo aritmético: a abdução adquire um traço de verdade em uma análise intrafigural. Todavia não se trata de um movimento de generalização algébrica.
16	Formadora/pesquisadora2: quanto dá?	
17	Eloísa: 37.	
18	Formadora/pesquisadora2: esse valor é de qual posição?	
19	Eloísa: 10ª.	

Fonte: Encontro 5, G4, Vídeo de Trabalho Conjunto (19’35” – 20’45”)

A analiticidade, neste caso, ainda está no campo dos valores concretos a partir da contagem, não há uma dedução para se calcular qualquer termo da sequência, sendo assim, ainda não podemos afirmar que este movimento do pensamento pertence ao pensamento algébrico, apesar de muito sofisticado.

Embora Eloísa tenha compreendido a indeterminação (isto é, o papel desempenhado pela posição do termo), ainda não denotou as grandezas em um contexto analítico e dedutivo. O movimento de generalização apesar de sofisticado, parte da contagem termo a termo. O pensamento ainda continua nos limites do pensamento aritmético, mas em um novo estágio que inclui uma aproximação de uma generalização aritmética sofisticada (VERGEL; RADFORD; ROJAS, 2021), já que houve a generalização do padrão, porém a base para encontrar outros termos foi a contagem termo a termo a partir da quantidade de quadradinhos da 5ª posição (figura 4).

Figura 4 – Registro generalizado de resolução da primeira questão

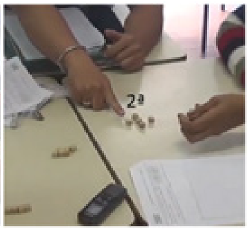
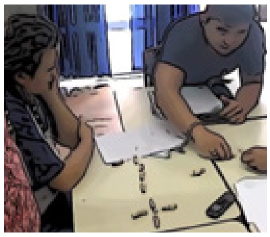
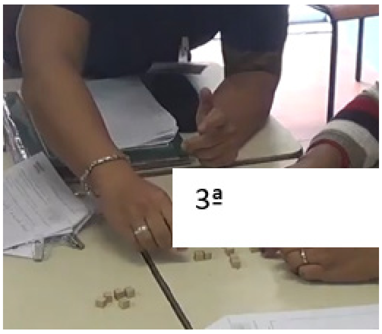
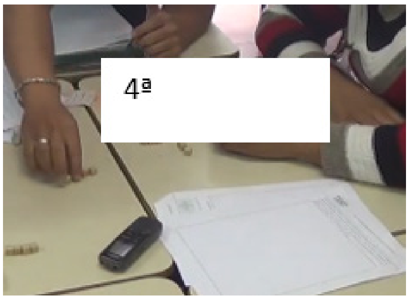


Fonte: Eloísa, Encontro 5, Vídeo de Trabalho Conjunto_19’38”/ Eloísa, Registro Individual

Sendo assim, consideramos que o modo de pensamento dos professores está próximo a generalização aritmética sofisticada, uma vez que eles compreendem a estrutura espacial da sequência, mas a estrutura numérica está ainda na base do pensamento aritmético.

O professor Irineu iniciou uma explicação (quadro 5), se aproximando a estrutura da sequência, envolvendo a relação funcional entre a posição e a quantidade de quadradinhos.

Quadro 5 – Explicação do professor Irineu sobre a estrutura da sequência

Enunciado	Segmento Saliente 5	Comentários interpretativos
20	Irineu: Aqui é a primeira posição (coloca 1 cubinho). Aqui é a segunda posição (coloca os 4 cubinhos laterais e pergunta). Aumentou quanto? (a partir do cubinho central).  	Enquanto os professores Irineu e Katia dialogam, a professora Eloísa observa atentamente. 
21	Katia: 1, aumentou 1.	A cada lado do cubinho.
22	Irineu: Agora a terceira posição. E agora aumentou quanto? 	Acrescentou mais um cubinho em torno do cubinho central.
23	Katia: 2. 3ª posição aumentou 2.	
24	Irineu: aqui já é na 4ª. 	Aumentando mais um cubinho a cada lado do cubinho referente a 1ª posição.
25	Katia: na 4ª, aumentou 3.	
26	Eloísa: E na 5ª, que era para um menino sair.	

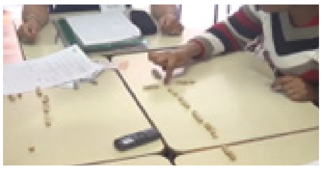
27	Katia: aumentou 4. Então é 4 x 4 + 1 que dá 17. Na 5ª posição. E na 10ª? 	
28	Paula: Daí você conta: 6ª, 7ª, 8ª [...]	A professora Paula retoma a contagem termo a termo.

Fonte: Encontro 5, G4, Vídeo de Trabalho Conjunto (34'55" – 35'28")

O Segmento Saliente 5 parece ser potencial para os professores compreenderem a relação funcional entre as grandezas (quadradinhos e posição) envolvendo a estrutura numérica e espacial, porém, retomaram a contagem termo a termo, chegando à conclusão da 2ª questão continuando no movimento do pensamento aritmético envolvendo a generalização aritmética sofisticada. O professor Irineu demonstrou indícios de ter compreendido as duas estruturas essenciais já no campo do pensamento algébrico, porém os demais professores continuaram na contagem termo a termo no campo do pensamento aritmético, conforme apresentado no segmento saliente 6 (quadro 6).

Quadro 6 – Generalização aritmética sofisticada

Enunciado	Segmento Saliente 6	Comentários interpretativos
29	Katia: Aqui dá quanto? 	Referindo-se a quantidade de cubinhos de um dos lados do cubinho referente a 1ª posição.
30	Eloísa: Mas por que esses daqui têm 5 e esse só tem 4?	Questionando o primeiro bloquinho formado por 4 cubinhos e os demais formados por 5 cubinhos, representando o aumento de 5 posições para a saída de cada menino.
31	Paula: Porque aqui é a primeira posição.	Apontando para o cubinho referente a 1ª posição e reinicia a contagem até o cubinho referente a 25ª posição.

32	Katia: Então vai ser 24 [...]  [...] vezes 4 mais 1 [...]  [...] que dá? 97 [...]. Então, na verdade a gente respondeu a 2 aqui.	Ao final da conclusão, a professora Eloísa, concorda que a quantidade de quadradinhos da sequência é 97 (24x4+1), mas parece que ainda não compreendeu a relação funcional da sequência: posição em função da quantidade de crianças, havendo então uma generalização aritmética sofisticada.

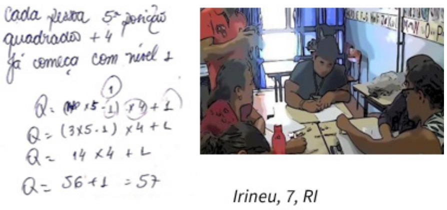
Fonte: Encontro 5, G4, Vídeo de Trabalho Conjunto (36' – 36'48")

Os professores demonstram compreenderem a indeterminação, havendo uma denotação a partir de uma analiticidade concreta do fenômeno, mas não há uma analiticidade envolvendo a dedução, característica essencial do pensamento algébrico.

A terceira questão envolvia a busca de solução do enigma para um número qualquer de crianças. Os professores retomam a 1ª questão e concluem que o processo para encontrar a quantidade de quadradinhos da 5ª posição era 4 x 4 + 1. Essa conclusão encontrada pelos professores ainda está no campo do concreto sensorial, já que eles este resultado é encontrado por meio da observação concreta do objeto na sua estrutura espacial. A professora Katia diz se era isso que deveria ser escrito na 3ª questão, e o professor Irineu explica que eles têm que escrever um jeito de calcular a quantidade de quadradinhos para sair qualquer número de pessoas e apresenta um esboço de como registrar essa relação, conforme apresentado no quadro 7 a seguir:

Quadro 7 – Esboço sobre a relação funcional da sequência

Enunciado	Segmento Saliente 7	Comentários interpretativos
33	Irineu: Seria isso aqui ó. Quadradinho igual a quantidade de pessoas vezes cinco menos um.	Enquanto vai falando, o professor Irineu vai mostrando cada item que escreveu e explicando cada um.
34	Katia: se fossem duas pessoas, seria duas vezes cinco menos um?	A professora está considerando os blocos de 5 quadradinhos para cada criança.

35	Irineu: Menos um, porque é o um inicial. É a posição número 1. Depois é vezes quatro, porque vai aumentando de quatro em quatro, e depois você tem que somar novamente esse um inicial. Você tira e põe novamente.  Irineu, 7, RI	O termo rasurado na escrita do professor Irineu é NP (número de pessoas). Os dados apontam indícios de um pensamento algébrico incluindo uma generalização algébrica simbólica. Enquanto o professor Irineu vai explicando os termos da fórmula que ele elaborou, a professora Katia e Paula vão usando o material concreto para fazer uma relação com os termos.
36	Katia: não tinha como chegar nesse resultado sem tirar e colocar?	Referindo-se ao “um” subtraído no início e somado ao final.

Fonte: Encontro 7, G4, Vídeo de Trabalho Conjunto (12’04” – 12’43”)

O modo pelo qual o professor Irineu apresenta seu modo de pensar sobre a estrutura da sequência se aproxima do movimento do pensamento algébrico passando pela generalização algébrica simbólica, uma vez que se apoia nos termos simbólicos para explicar o modo geral de organização da sequência. A variável além de ser denotada de forma explicita e ostensiva, ganha um caráter simbólico superando os dêiticos verbais mostrando o assentamento no campo consciente (RADFORD, 2018). Pela fala, gestos e outros meios semióticos apresentados pelo professor Irineu, identificamos que existe a compreensão da estrutura espacial e numérica envolvida na sequência. A analiticidade se dá no movimento dedutivo, em que os símbolos alfanuméricos pertencem à consciência do professor.

Apesar do professor Irineu mostrar evidências de estar pensando algebricamente envolvendo uma generalização algébrica simbólica, ele ainda não consegue explicar o motivo que ele subtrai o quadradinho da 1ª posição e soma no final. As professoras Eloísa, Katia e Paula se mostraram satisfeitas com a forma geral de resolução elaborada pelo professor Irineu, pautada na relação entre a posição em função do número de crianças, testada para alguns casos particulares, mas não demostraram ter compreendido as variáveis, relações funcionais e generalização de padrões de modo gera.

Para confrontar a fórmula elaborada pelo professor Irineu, que estava baseada na relação entre o número de pessoas e a posição (posição = número de pessoas x 5), bem como, propor uma provocação para que o grupo pensasse no problema em um contexto analítico, o pesquisador/formador3 questiona o grupo sobre qual quantidade de quadradinhos teriam na 23ª posição. Tal pergunta não pode ser respondida a partir da fórmula elaborada pelo professor Irineu, já que existe na fórmula a relação da quantidade de pessoas com a posição. Essa pergunta desencadeou um novo percurso no pensamento dos professores. O trabalho conjunto do pesquisador/formador3 com os professores, as boas perguntas, as provocações etc. possibilitou envolver o sujeito na situação de dilema, que segundo Caraça (1989) é o que possibilita a superação do pensamento para um nível superior.

As professoras Eloísa, Paula e Katia recorreram ao material concreto e a contagem termo a termo para buscar a resposta da pergunta feita pelo pesquisador/formador3. Já o professor Irineu testa um novo modo sem fazer a relação da quantidade de pessoas com a posição a partir da fórmula anterior.

Figura 5 – Registro do professor Irineu para a 23ª posição

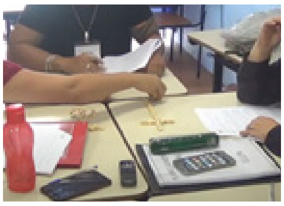
posição

$$Q = (23-1) \times 4+1$$
$$Q = 22 \times 4 + 1$$
$$Q = 89$$

Fonte: Irineu, 7, Registro Individual

Ao comparar a quantidade de cubinhos do material dourado com a conta feita pelo professor Irineu (figura 5), e percebendo que os valores são coincidentes, os professores dialogam sobre a relação funcional entre a quantidade de quadradinhos e a posição.

Quadro 8 – Diálogo envolvendo a relação funcional da sequência

Enunciado	Segmento Saliente 8	Comentários interpretativos
37	Irineu: eu fiz aqui ó, pra achar na 23ª: (23 – 1) x 4 + 1. 	Mostrando sua folha com os registros para os professores. As professoras observam atentamente os argumentos da sua elaboração para resolução do problema.
38	Katia: Deu quanto?	
39	Irineu: 89.	
40	Eloísa: Aqui você está na 20ª e ele falou ali 23ª. Coloca mais 3 [cubinhos]. 	Diálogo com a professora Paula observando os cubinhos do material concreto organizados para a 20ª posição, realizando a contagem termo a termo.
41	Paula: Conta aí. 	A professora Katia inicia a contagem dos cubinhos termo a termo. Base do pensamento aritmético e generalização aritmética. Os professores Irineu e Eloísa observam a contagem.
42	Katia: Tem 21.	

43	Eloísa: Não, tem 22.	A professora Eloísa não demonstrou gestual de fazer a contagem termo a termo e se mostrou convicta que deveriam ser multiplicados pelo padrão os 22 cubinhos e não 21.
44	Katia: Tem 23. Então tem que fazer 23 x 4 [...].	A professora Katia recomeça a contagem. Os professores Irineu e Eloísa observam.
45	Eloísa: [...] aqui tem 22.	Eloísa a interrompe e demonstra segurança ao afirmar a quantidade de cubinhos. Indícios da compreensão das duas estruturas da sequência: espacial e numérica.
46	Katia: Então é 22 x 4 que dá 88, mais 1, que dá 89.	
47	Eloísa: É.	A afirmação dá indícios de movimento do pensamento algébrico incluindo a generalização algébrica factual.
48	Irineu: Sempre tem que fazer o número de posição menos 1.	A expressão oral mostra evidências do movimento do pensamento algébrico incluindo, neste caso, uma generalização algébrica contextual.

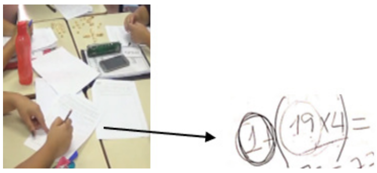
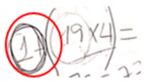
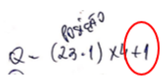
Fonte: Encontro 7, G4, Vídeo de Trabalho Conjunto (18'20" – 19'33")

A segurança na fala da professora Eloísa demonstrada nas linhas 43 e 45, apresentadas no quadro 8, nos dá indícios de que a professora compreendeu de forma consciente a relação funcional entre as grandezas em que era necessário subtrair uma unidade da posição a ser encontrada para depois multiplicar pelo padrão, fortalecendo nossa tese de ela compreendeu a relação entre as grandezas a partir das duas estruturas trazidas por Radford (2014): espacial e numérica.

A atitude dos professores apresentadas durante o segmento saliente 8, demonstra os princípios do trabalho conjunto em que os professores adotam uma postura comprometida para trabalharem juntos e alcançar algo comum. Neste segmento saliente, os professores apresentaram evidências de compreensão das relações funcionais de modo consciente, e a expressão manifestada na linha 48 pelo professor Irineu representa a compreensão dos demais professores do grupo no sentido do movimento do pensamento algébrico. A generalização incluída neste movimento do pensamento é algébrica contextual, visto que relação entre as grandezas é revelada para explicar o modo geral de representação da relação funcional entre posição e quadradinhos, usando como recurso os dados espaciais que se configuram como uma "marca das generalizações contextuais" (RADFORD, 2018, p. 17, tradução nossa). Neste movimento a variável é explicitada por meio dos dêiticos verbais na qual tais variáveis se tornam conscientes para os professores (IBIDEM). No segmento saliente a seguir (quadro 9), as professoras continuam a testar a regra encontrada:

Quadro 9 – Generalização algébrica envolvendo o conhecimento algébrico

Enunciado	Segmento Saliente 9	Comentários interpretativos
49	Carla	Quando a professora diz que vai fazer 1 depois, ela está se referindo que inicialmente ele é subtraído para depois ser somado.

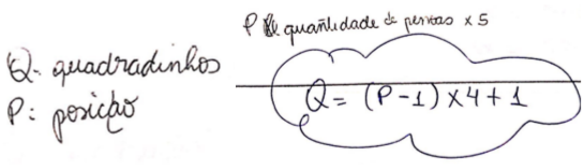
50	Katia: Vinte menos 1.	A professora Katia sussurra.
51	Carla: Vai fazer vezes [4], depois soma com esse (mostrando o 1 inicial), que vai dar a quantidade de quadrados. 	O círculo em torno do 1 foi para evidenciar que aquele 1 era referente ao quadradinho da posição 1. Ele está fora dos parênteses mostrando que primeiro deve-se fazer a multiplicação da posição menos um (posição anterior) pelo padrão, para depois somar com o quadradinho inicial.
52	Irineu: Por isso que eu falo, tem que colocar a posição menos 1 e depois você soma o 1 de novo, pra pessoa sempre saber que tem que tirar o 1, se não colocar que é pra tirar o 1, a pessoa esquece. Por exemplo, desse jeito assim, a pessoa acaba esquecendo [de retirar 1]. É a 20ª posição, vou colocar o 20, e acaba se embananando.	O professor Irineu foi mostrando cada termo que fez na sua folha. Quando o professor diz "desse jeito assim", ele faz referência ao registro direto que a professora Carla fez, sem escrever (20-1): posição menos 1.
53	Paula: Mas ele (professor Irineu) deixou claro que tem que tirar 1, ali a pessoa observa.	Fazendo a referência ao registro apresentado na figura 5, em que fica explícita a necessidade de subtrair a primeira posição.
54	Eloísa: Mas ela já diminuiu. Só que ela diminuiu automaticamente, no raciocínio.	
55	Paula: Mas eu acho que tem que colocar o menos 1.	
56	Eloísa: Verdade! Aqui não fica claro da onde veio o 19.	Apesar de o registro do Irineu estar diferente do da professora Carla, a professora Eloísa demonstra compreender que ambos retratam a estrutura geral da sequência, mesmo que para a situação particular da 23ª posição.
57	Katia: Ela [Carla] fez igualzinho. Ela queria saber a 20ª, ela diminuiu 1, fez igualzinho: menos 1, vezes 4, mais 1. Só inverteu.	Expressão oral que demonstra o pensamento algébrico incluindo a generalização algébrica contextual.
58	Eloísa: Esse mais 1 você jogou pra trás, ela jogou pra frente [...].  Carla, 7, RI  Irineu, 7, RI	Na folha de registro individual da professora Carla, ela isolou o 1 inicial na frente da parte variável da sequência, ficando
59	Carla: Aqui é então a posição menos 1, vezes 4 + 1.	Ao falar, a professora Carla se apoia nos registros simbólicos anotados na folha de registros individual.

Fonte: E7G4VTC (30'50" – 35'54")

Neste episódio conseguimos identificar o movimento do pensamento algébrico e da generalização algébrica já em outro nível de complexidade. A generalização contextual vai dando espaço a um modo mais geral, em que os signos vão superando os aspectos verbais não sendo necessário o aporte do material concreto. Na linha 59 a professora Carla apresenta uma fórmula que é compreendida por todos os professores, de modo que o simbolismo alfanumérico ressignifica as operações numéricas particulares (RADFORD, 2018). Esse novo movimento do pensamento algébrico tem em seu interior a generalização algébrica simbólica em que a manifestação concreta espacial das generalizações contextuais é incorporada por signos abstratos simbólicos.

Como a questão versou sobre um modo de registrar uma forma de calcular a quantidade de quadradinhos para que todas as crianças pudessem deixar a terra mágica, o grupo da professora Eloísa propôs o seguinte registro realizado na folha do professor Irineu:

Figura 6 – Registro usando a notação simbólica alfanumérica para representar a relação entre as grandezas



Fonte: Irineu, 7, Registro Individual.

O registro apresentado na figura 6 aponta as duas relações funcionais envolvidas na SDA: posição em função do número de pessoas (P é a quantidade de pessoas x 5), e a quantidade de quadradinhos em função da posição Q = (P – 1) x 4 + 1.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como buscamos demonstrar ao longo deste artigo, a TO foi tomada como base teórica e metodológica para a formação continuada de professores organizada em estados emergentes e envolvendo elementos do conhecimento algébrico nos anos iniciais, que constitui a parte experimental da pesquisa aqui relatada. De forma complementar, a teoria foi essencial na metodologia de produção, coleta e análise de dados. Ainda nos apoiamos na TO para a investigação do fenômeno específico de desenvolvimento do pensamento algébrico, manifesto em formas de generalização.

A análise multimodal da atividade no espaço formativo, realizada por meio dos diversos meios semióticos manifestados pelos professores participantes dessa pesquisa, revelou que o trabalho conjunto se mostrou fundamental para a superação das formas pensamento aritmético para o pensamento algébrico, uma vez que diante da base teórica que assumimos, a compreensão teórica sobre certo conceito não é natural. A generalização algébrica teve durante o movimento do pensamento algébrico os três estados: a) factual no momento que os professores utilizam os dados particulares, mas não necessitam se apoiar na contagem dos termos; b) contextual: no momento que os professores utilizam termos literais para expressar os termos gerais das sequências; c) simbólica: quando os signos são utilizados para representar as variáveis e sua relação funcional, tomando seu lugar na consciência.

A realidade apreendida mostrou que o processo de objetivação que permite o encontro progressivo do saber algébrico transformado em um objeto presente na consciência, isto é, na forma de conhecimento algébrico, se dá como um modo especial de pensar envolvendo a indeterminação, a analiticidade e a denotação. Deste modo, a objetivação, “leva a uma nova forma de perceber, falar e conceitualmente” abordar os conceitos matemáticos (RADFORD, 2021, p. 136).

Na análise realizada, vemos como o desenho da atividade, através da escolha de problemas e trabalho em pequenos grupos, cria condições para formação de um labor conjunto em que os professores e o investigador produzem uma obra comum que está constituída de ideias e contradições das quais emerge uma maneira sensível de pensar algebricamente. Essa obra comum inclui o reconhecimento da insuficiência de ideias de proporcionalidade, reconhecimento que implica centrar-se na identificação das variáveis e sua correspondência analítica.

No contexto da formação continuada de professores apresentada nessa pesquisa, o trabalho conjunto ocorreu entre todos os sujeitos envolvidos na atividade: pesquisadores/formadores e professores em formação. As evidências do trabalho conjunto mostraram que o processo de objetivação do saber algébrico permite novas formas de manifestação semiótica do conhecimento algébrico.

Concluímos que a Teoria da Objetivação se faz importante para pesquisas em educação seja envolvendo processos formativos junto a alunos, professores ou outros atores, uma vez que ela permite analisar o fenômeno em movimento e em todos seus aspectos de manifestação semiótica.

REFERÊNCIAS

BRASIL. (MEC). **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: 2018.

DAVÍDOV, V. **La Enseñanza Escolar y el Desarrollo Psiquico**: Investigación psicológica y experimental. Editorial Progresso. Moscu, 1988.

DICIONÁRIO HOUAISS, 2024. Disponível em: <https://houaiss.uol.com.br>. Acesso em: 10 de abri de 2024.

FILLOY, E.; ROJANO, T. Soving Equations: Transition from Arithmetic to Algebra. For the learning of matemátics. V. 9, nº 2, p. 19-25. **FLM Publish Association**. Montreal. Quebec. Canadá, 1989.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar… A educação algébrica elementar. In: Pro-Prosições. V. 4, nº 10, p. 79-91, 1993.

LEONTIEV, A. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Horizonte, 1978.

KAPUT, J. J. Teaching and Learning a New Algebra with Understanding. **National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science**. Washington: National Science Foundation, Arlington, 2000.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. 2. Ed. Campinas: Papirus, 1998.

MORETTI, V. D.; RADFORD, L. Contribuições da Teoria da Objetivação para a Análise multimodal de vídeos na Pesquisa sobre formação de Professores que ensinam matemática. **VIII SIPEM** – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. SBEM, 2021.

MORETTI, V. D.; VIRGENS, W. P.; ROMEIRO, I. O. Generalização Teórica e o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: contribuições para a formação de professores dos Anos Iniciais. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 35, p. 1457-1477, 2022.

MORETTI, V. D.; RADFORD, L. Análise multimodal de vídeos: contribuições da Teoria da Objetivação para a pesquisa sobre formação de professores que ensinam Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, [S. l.], v. 17, p. e6236101, 2023. DOI: 10.14244/198271996236. Disponível em: https://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/6236. Acesso em: 12 abr. 2024.

RADFORD, L. **Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

RADFORD, L. On the development of early algebraic thinking. **PNA** 64(1), p.117-133, 2012.

RADFORD, L. Methodological Aspects of the Theory of Objectification. In: **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, n.18, pp. 547-567. 2015. https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/1463/970. Acesso em 25/03/2024.

RADFORD, L. A teoria da Objetivação e seu lugar na pesquisa sociocultural em Educação Matemática. In: MORETTI, V. D.; CEDRO, W. L. **Educação Matemática e a Teoria Histórico-Cultural**: Um olhar sobre as pesquisas. P. 229-261. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2017a.

RADFORD, L. Ser, subjetividad y alienación. In: D'AMORE, B., & RADFORD, L. **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos**. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017b, p. 137-166.

RADFORD, L. The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In KIERAN, C. (Ed.) **Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds**: The global evolution of an emerging field of research and practice. p. 3-25. New York: Springer, 2018.

RADFORD, L. **Teoria da Objetivação**: Uma perspectiva vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática. Tradução de Bernadete B Morey e Shirley T. Gobara. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

ROMEIRO, I. O. **Formas de generalização no processo formativo de professores envolvendo elementos do conhecimento algébrico nos anos iniciais**. Tese (Doutorado em Educação) – 272f. Programa de Pós-Graduação, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2023.

SANTOS, F. C. F. **Desenvolvimento do pensamento algébrico de professores dos anos iniciais em atividade de ensino**: o pensamento teórico mediado por conceitos algébricos. Dissertação [Mestrado]. Universidade Federal de São Paulo. Guarulhos, 2020.

SOUSA, M. C.; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino: O percurso dos conceitos algébricos.** Campinas, SP: Mercado das Letras, 2014.

VERGEL, R. C.; RADFORD, L.; ROJAS. P. J. G. Zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico: una contribución a la noción de zona de emergencia del pensamiento algebraico. **Bolema**, Rio Claro (SP), v.36, n.74, p.1174-1192, dez. 2022. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a11.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. 2ª ed. 2ª triagem. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

ZEFERINO, L. C. **A Organização do Ensino para o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais:** Contribuições da Teoria da Objetivação e da Atividade Orientadora de Ensino na Formação Continuada de Professores que Ensinam Matemática. Tese (Doutorado em Educação) – 229f. Programa de Pós-Graduação, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2024. Versão Provisória.

COMO CITAR — APA
Romeiro, I. de O., Moretti, V. D., & Radford, L. (2024). Da formação à pesquisa sobre professores que ensinam Matemática: contribuições da Teoria da Objetivação para a compreensão do desenvolvimento do pensamento algébrico. ***PARADIGMA**, XLV*(Edición Temática 2), e2024002.
https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024002.id1574.

COMO CITAR — ABNT
ROMEIRO, Iraji de Oliveira; MORETTI, Vanessa Dias; RADFORD, Luis. Da formação à pesquisa sobre professores que ensinam Matemática: contribuições da Teoria da Objetivação para a compreensão do desenvolvimento do pensamento algébrico. **PARADIGMA**, Maracay, v. XLV, Edición Temática n. 2, e2024002, Nov., 2024.
https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024002.id1574.

HISTÓRICO
Submetido: 19 de abril de 2024.
Aprobado: 17 de junio de 2024.
Publicado: 01 de noviembre de 2024.

EDITORAS CONVIDADAS
Claudianny Amorim Noronha
Shirley Takeco Gobara
Luanna Priscila da Silva Gomes

EDITOR JEFE
Fredy E. González

ARBITROS
Dos árbitros evaluaron este manuscrito y no autorizaron la publicación de sus nombres